I. **Стохастическая финансовая математика —** раздел математики, призванный анализировать финансовые структуры, функционирующие в условиях неопределенности и находить наиболее рациональные способы управления финансовыми структурами и средствами, с учетом таких факторов, как *время, риск, стохастическая эволюция* и др.

Принято выделять следующие объекты и структуры, которыми оперирует Финансовая математика: *индивидуумы*, *фирмы*(например, компании), *посреднические структуры*(банки, пенсионные фонды) и *финансовые рынки*. Именно этот последний объект является основным объектом изучения стохастической финансовой математики, базирующейся на таких вероятностно-статистических дисциплинах как теория случайных процессов, статистика случайных процессов, стохастический анализ и др.

Каждый хорошо знает по многочисленным публикациям и новостям в СМИ, что цены акций, значения «глобальных» финансовых индексов меняются хаотическим образом. Например, на Рис. 1. приведен график показывающий изменение индекса DJIA (средний индекс Доу Джонса, часто называемый *Dow*)

Первая попытка математического описания эволюции стоимости акций, опирающаяся на теорию вероятностей, была предпринята Л. Башелье в его диссертации «Théorie de la spéculation» и опубликована в 1900 году. Используя процесс броуновского движения Л. Башелье доказал формулу для математического ожидания платежного обязательства, которая в современной теории финансов известна как *формула справедливой стоимости* опциона-колл.

Рис. 1. Эволюция индекса DJIA (Dow Jones Industrial Average).

В соответствии с принятой терминологией финансовый рынок состоит из денежных и валютных рынков, рынков ценных металлов и рынков финансовых инструментов. Финансовые инструменты делятся на два класса: основные и производные. К числу основных финансовых инструментов относят ценные бумаги(банковские счета, облигации, акции). К производным финансовым инструментам относят: опционы, фьючерсные контракты, варранты, свопы, и др.

Стохастический подход в Финансовой математике основывается на предположении, что имеется некоторое вероятностное пространство (Ω, F, P). Так как время и динамика развития процессов описывающих поведение финансовых объектов являются компонентами вероятностной теории, то предполагается, что вероятностное пространство наделено потоком σ-алгебр $(F_t)_{t\geq 0}$. Получающееся таким образом вероятностное пространство с потоком σ-алгебр принято называть *фильтрованным вероятностным пространством*, а события из F_t как события, наблюдаемые на рынке до момента времени t . Принято рассматривать два типа моделей описывающих динамику финансовых инструментов: *дискретные* и *непрерывные*, в зависимости от предположения о структуре пространства времени.

Пусть $B = (B_t)_{t\geq 0}$ обозначает процесс эволюции состояния банковского счета, $S = (S_t)_{t\geq 0}$ – процесс эволюции стоимости акции. С каждой парой банковского счета B и акции S связываю понятие (B,S)-рынка, понятие *стратегии*(портфеля) $\pi = (\beta, \gamma)$, где $\beta = (\beta_t)_{t\geq 0}$ и $\gamma = (\gamma_t)_{t\geq 0}$ являются предсказуемыми процессами, и понятие *капитала* $X^\pi = (X_t^\pi)_{t\geq 0}$ отвечающего этой стратегии:

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t. \tag{1}$$

Если необходимо рассматривать набор из d акций $S = (S^1, ..., S^d)$, то следует предполагать, что компонента $\gamma = (\gamma^1, ..., \gamma^d)$ и под $\gamma_t S_t$ в формуле (1) следует понимать скалярное произведение.

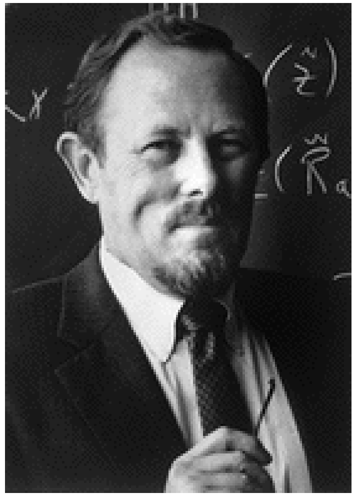
В классе всех стратегий выделяют, *самофинансируемые стратегии*, для которых эволюция капитала определяется формулами (в дискретном случае)

$$\Delta X_t^\pi = \beta_t \Delta B_t + \gamma_t \Delta S_t, \qquad t \geq 1 \tag{2}$$

означающими, что изменение капитала происходит лишь в результате изменений состояний банковского счета и стоимости акций, а не за счет изменения состояния портфеля.

Развитие теории динамики финансовых инструментов, в предположении условий неопределенности, произошло благодаря работам Г. Марковица (1952) и М. Кендалла (1953):

Работа Г. Марковица, заложившая основы *теории портфеля ценных бумаг*, послужила отправной точкой для создания В. Шарпом и С. Россом двух классических теорий – модели ценообразования основных фондов (CAPM) и арбитражной теории расчетов (APT). В 1990 году Г. Марковиц и В. Шарп были награждены премией имени Альфреда Нобеля за развитие экономической науки.



William F. Sharpe

Работа М. Кендалла 1953 года относиться к вопросу о том, какими стохастическими процессами описывается динамика цен акций. Изложенные в этой работе идеи привели к созданию *теории эффективного рынка*.

Maurice Kendall

Предположим, что финансовая активность на (B,S)-рынке происходит в моменты времени $t = 0,1,...,N$

Определение 1. *Самофинансируемая стратегия* π *реализует арбитражную возможность, если при нулевом начальном капитале, капитал* $X_N^\pi \geq 0$ *п.н. и* $X_N^\pi > 0$ *с положительной вероятностью.*

Определение 2. *Говорят, что на* (B,S)*-рынке отсутствуют арбитражные возможности, если множество самофинансируемых арбитражных стратегий пусто.*

Пусть $f_N = f_N(\omega)$, $\omega \in \Omega$ некоторая неотрицательная F_N – измеримая функция, представляющая собой платежное обязательство.

Определение 3. *Самофинансируемый портфель* $\pi = (\beta,\gamma)$ *на* (B,S)*-рынке называют* (x, f_N)*-хеджем, если* $X_0^\pi \equiv x$, $X_N^\pi \geq f_N$ *п.н.*

Данное понятие хеджа играет роль инструмента, позволяющего добиваться получения капитала к моменту N не меньшего, чем f_N.

Определение 4. *Говорят, что по отношению к моменту* N *финансовый* (B,S)*-рынок является полным, если ограниченное платежное поручение* f_N *является достижимым, т.е. для него найдется* (x, f_N)*-хедж* π *с* $X_0^\pi = x$ *и* $X_N^\pi = f_N$ *п.н.*

Теорема 1. (Первая фундаментальная теорема теории расчетов финансовых активов)

Пусть определенный на полном вероятностном пространстве $(\Omega, F, (F_t)_{t\leq N}, P)$, $N < \infty$, *финансовый* (B,S)*-рынок состоит из банковского счета* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *и конечного числа активов* $S = (S_t^1,...,S_t^d)_{t\leq N}$. *Для того чтобы* (B,S)*-рынок был безарбитражным, необходимо и достаточно, чтобы существовала хотя бы одна (называемая «мартингальной») мера* $\widetilde{P}$, *эквивалентная мере* P, *относительно которой последовательность*

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{S_t^1}{B_t},...,\frac{S_t^d}{B_t}\right)_{t\leq N}$$

является $\widetilde{P}$ *–мартингалом.*

Теорема 2. (Вторая фундаментальная теорема расчетов финансовых рынков)

Безарбитражный финансовый рынок является полным тогда и только тогда, когда множество Ξ *мартингальных мер состоит из одной меры.*

Предположение безорбитражности финансового рынка означает *эффективность* его функционирования.

Ценность этих теорем в том, что предоставляют возможности проведения расчетов, связанных с финансовыми активами, расчетами цен хеджирования, определяемых далее.

Определение 4. *Ценой совершенного хеджирования всякого* F_N*-измеримого платежного поручения* f_N *называется величина*

$$C(f_N;P) = \inf\{x : \exists \pi \text{ с } X_0^\pi = x \text{ и } X_N^\pi = f_N \quad \text{п.н.}\}.$$

На безарбитражных полных рынках цена $C(f_N;P)$ определяется следующей формулой

$$C(f_N;P) = B_0 E_{\widetilde{P}} \frac{f_N}{B_N} \tag{3}$$

где $\widetilde{P}$ – мартингальная мера.

Определение 5. *Пусть* $C = (C_t)_{t\le N}$ *неотрицательный неубывающий* $(F_t)_{t\le N}$*-согласованный процесс, с* $C_0 = 0$. *Говорят, что портфель* π *и процесс* C *образуют самофинансируемую стратегию с потреблением, если его капитал удовлетворяет условию* $\Delta X_t^{\pi,C} = \beta_t \Delta B_t + \gamma_t \Delta S_t - \Delta C_t$.

Ценой хеджирования всякого ограниченного F_N*-измеримого платежного поручения* f_N *называют величину*

$$C^*(f_N;P) = \inf\{x : \exists(\pi, C) \text{ с } X_0^{\pi,C} = x \text{ и } X_N^{\pi,C} \ge f_N \quad \text{п.н.}\}.$$

Из общей теории следует, что на безарбитражных рынках

$$C^*(f_N;P) = \sup_{\widetilde{P}\in\Xi} B_0 E_{\widetilde{P}} \frac{f_N}{B_N}, \tag{4}$$

где Ξ – множество всех мартингальных мер (в случае полных рынков множество Ξ содержит только одну меру и формула (4) превращается в формулу (3)).

Формулы (3) и (4) играют ключевую роль при расчете «справедливых» цен таких производных финансовых инструментов, как *опционы*.

Опцион – это ценная бумага, дающая покупателю право купить или продать определенную ценность(акцию, облигацию и т.п.) в оговариваемый период или момент времени на заранее оговариваемых условиях. Опционы делятся на два класса: опционы покупателя и продавца. Первые дают право покупки, вторые – право продажи.

Пусть N – момент исполнения опциона, K – фиксированная цена покупки акций в момент исполнения, возможно отличная от фактической цены этих акций. Доход покупателя определяется формулой $f_N = (S_N - K)^+$, это же значение определяет величину платежа, который продавец должен выполнить в момент времени N, составив портфель так, чтобы соответствующий капитал был бы не меньше f_N.

Основные вопросы теории расчетов опционов состоят:

- в определении минимального начального капитала x, который обеспечивает получение капитала $X_N^\pi \geq f_N$
- в определении хеджирующих портфелей, для которых выполнено предыдущее неравенство.

Из определения 4 вытекает, что в случае безарбитражных полных рынков минимальный начальный капитал x есть ни что иное, как $C(f_N; P)$ которую принято называть справедливой стоимостью опциона.

Популярной моделью (B,S)-рынка, в случае дискретного времени, является *модель Кокса-Росса-Рубинштейна*, в которой

$$\Delta B_t = rB_{t-1}, \quad \Delta S_t = \rho_t S_{t-1} \tag{5}$$

Где $(\rho_t)_{t \leq N}$ – последовательность независимых одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин, принимающих значения a и b $(-1 < a < b)$ с положительными вероятностями.

Для случая опциона с моментом исполнения N, с функцией выплаты $f_N = (S_N - K)^+$, справедливая цена определяется следующим выражением:

$$C(f_N; P) = S_0 \Lambda(K_0, N; p^*) - K(1+r)^N \Lambda(K_0, N; P)$$

где $p^* = \frac{1+b}{1+r}\widetilde{P}, \quad K_0 = 1 + \left[\ln \frac{K}{S_0(1+a)^N} \Big/ \ln \frac{1+b}{1+a} \right], \quad \Lambda(j, N; p) = \sum_{k=j}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}.$

В случае непрерывного времени основными моделями описания динамики финансовых активов, являются модели, основанные на *семимартингалах*. Пусть (B,S)-рынок состоит из банковского счета $B=(B_t)_{t\le T}$ и акции $S=(S_t)_{t\le T}$, являющихся положительными семимартингалами. Аналогично (2), портфель π естественно назвать самофинансируемым, если

$$dX_t^{\pi} = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t$$

Сформулированные выше, для дискретного случая, фундаментальные теоремы, верны «в основном» и для непрерывного времени.

Среди разнообразных моделей для непрерывного времени наиболее известна *модель Блека–Шоулса:*

$$dB_t = rB_t dt, \qquad dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dw_t) \tag{6}$$

где $r>0,\quad B_0>0,\quad S_0>0$ и $w=(w_t)_{t\le T}$ – стандартный винеровский процесс (ср. с моделью (5)).

Формула для справедливой стоимости опциона для данной модели имеет вид

$$C(f_T;P) = B_0 E_{\widetilde{P}} \frac{f_T}{B_T},$$

где $\widetilde{P}$ – мартингальная мера. Для модели (6), в случае стандартного опциона покупателя эта формула превращается в *формулу Блека-Шоулса*:

$$C(f_T;P) = S_0\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy.$$

II. **к.ф.-м.н., доцент Колодий Н.А.**

Основные научные и учебно-педагогические интересы лежат в области стохастического анализа(стохастические интегральные уравнения, многопараметрические семимартингалы) и его применений(в финансовой математике и построении математических моделей в естествознании).

Предлагаются следующие блоки тем:

1. Мартингалы, локальные мартингалы с применением в финансовой математике.
2. Задачи стохастической волатильности.
3. Стохастические модели процессов канцерогенеза.